

Exercice 1

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tel que $2 \cdot 3^y = 1 + 5^x$.

Soit $(x; y)$ un élément de (E) tel que $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

- Montrer que $1 + (-1)^x \equiv 0 \pmod{3}$.
- En déduire que $5^x \equiv 5 \pmod{8}$.
- Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes modulo 8 de 3^n .
 - En déduire que y est impair.
- On suppose dans cette question que $y \equiv 0 \pmod{3}$.
 - Justifier que $3^y \equiv -1 \pmod{7}$.
 - Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel m , les restes modulo 7 de 5^m .
 - Montrer alors que $x \equiv 2 \pmod{6}$.
 - Conclure.
- On suppose dans cette question que $y \equiv 1 \pmod{3}$.
 - Justifier que $3^y \equiv 3 \pmod{7}$.
 - En déduire que $5^x \equiv 5 \pmod{7}$.
 - Déterminer alors les restes modulo 9 de 5^x et 3^y .
 - Déterminer alors x et y .
- On suppose dans cette question que $y \equiv 2 \pmod{3}$.
 - Déterminer les restes possibles modulo 13 de 3^y .

(b) En déduire le reste modulo 13 de 5^x .

(c) Conclure.

7. Déterminer l'ensemble (E) .

Exercice 2

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Soit dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $E_1 : 3^x - y^2 = 8$.

- Vérifier que le couple $(2, 1)$ est une solution de E_1 .
Soit le couple (x, y) solution de E_1 .
- Montrer que y est impair.
 - En déduire que $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
 - Montrer que si x est impair alors $3^x \equiv 3 \pmod{8}$.
 - En déduire que x ne peut être qu'un nombre pair.
- Soit k un entier naturel tel que $x = 2k$.
 - Montrer que $(3^k - y)(3^k + y) = 8$.
 - En déduire que $(2, 1)$ est l'unique solution de E_1 .

Partie B : Soit dans $\mathbb{N}$ l'équation $E_2 : 12^x \equiv 2 \pmod{23}$.

- Vérifier que $12^{22} \equiv 1 \pmod{23}$.
 - En déduire que $12^{21} \equiv 2 \pmod{23}$.
- Soit x une solution de E_2 et d le PGCD des entiers $x + 1$ et 22.
 - Montrer que $12^{x+1} \equiv 1 \pmod{23}$.
 - Montrer que $12^d \equiv 1 \pmod{23}$.
 - En déduire que $d = 11$ ou $d = 22$.
 - Montrer de ce qui précède que $x \equiv 10 \pmod{11}$.
- Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation E_2 .