1- Proposition et fonction propositionnelle

Exercice 1

Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques :

1) « Tout entier naturel est pair ou impair »
2) « Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres »
3) « Il existe un nombre rationnel strictement supérieur à son carré »
4) « La fonction f est croissante sur l'intervalle I »
5) « La fonction f est constante sur l'intervalle I »
6) « Le carré de tout nombre réel non nul est strictement positif »
7) « Un multiple de 18 est un multiple de 6 »

Exercice 2

Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P_1 : (\forall x > 0) : 2x + \frac{1}{2x} \geq 2$$
$$P_2 : (\forall x > 0) : \frac{1}{x} < x$$
$$P_3 : (\forall t \in \mathbb{R}) : t^2 - t + 1 < 0$$
$$P_4 : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : m = 2n + 1$$
$$P_5 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : 8x - y = 4$$
$$P_6 : (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) : 1 < x + y \leq 2 \implies |x + y| \leq 2$$

Exercice 3

On considère la proposition : $R : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 = 0$

1.) Donner la négation de la proposition R.
2.) En déduire que la proposition R est fausse.

2- Implication et contrapposée

Exercice 4

Déterminer la valeur de vérité de la proposition :

$P : (-2 < x < 6) \implies \left(\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{x+3}} < 1\right)$

Exercice 5

Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes :

$P : (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x \neq y \implies \frac{x}{3+x} \neq \frac{y}{3+y}$

$Q : (\forall x \geq 2)(\forall y \geq 2) : 8 + x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \implies (x = 2 \text{ ou } y = 2)$

Exercice 6

Prouver les implications :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x + y + 18}{6} \implies (x = y = 9)$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2 < x < 4 \implies \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$
3. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 3 \text{ et } y \geq \frac{3}{4}) \implies 0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{5}{3}$

Exercice 7

En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que :

$$P_1 : (\forall (x; y) \in (]1; +\infty[)^2) : x \neq y \implies x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$$
$$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0) \implies x^2 + y^2 \neq 0$$
$$P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^3 + x^2 - 2x < 0 \implies x < 1$$
$$P_4 : (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) : x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$
$$P_5 : (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : (xy \neq 1 \text{ et } y \neq x) \implies \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1})$$
$$P_6 : (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\forall z \in \mathbb{R}_+^*) : x^2 + y^2 + z^2 < 2 \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq \frac{1}{xyz}$$

Exercice 8

a, b et c trois nombres réels quelconques, Montrer que : $a + b > c \implies \left(a > \frac{c}{2} \text{ ou } b > \frac{c}{2}\right)$

3- Equivalence

Exercice 9

Déterminer la valeur de vérité de la proposition : $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq 0 \iff x^3 \leq 0$

Exercice 10

Montrer que :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \sqrt{x^2+4} - 2 \geq 0$
2. $(\forall x \geq 0) \ : \ \sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5 \iff x = 1$
3. $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4} = 4 \iff (x=0 \text{ et } y=0)$
4. $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq -5) \ : \ 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y+5} = 9 + x + y \iff (x = 2 \text{ et } y = -1)$
5. $(\forall (a;b) \in (]-1;1[)^2 \ : \ -1 < \dfrac{a+b}{1+ab} < 1$

Exercice 11

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; on considère les fonctions propositionnelles :

$P(x;y) \ : \ |x+y| \leq \sqrt{x^2+1+\sqrt{y^2+1}}$; $Q(x;y) \ : \ \sqrt{x^2+1-\sqrt{y^2+1}} \leq |x-y|$

Montre que : $P(x;y) \iff Q(x;y)$

Exercice 12

a et b deux réels. On considère les deux fonctions propositionnelles :

$F(x) \ : \ x^2 + 2ax + b = 0$; $G(x) \ : \ x^2 + 2bx + a = 0$

Établir l'équivalence suivante : $[(\exists x \in \mathbb{R}) \ : \ F(x) \text{ et } G(x)] \iff 4(a+b) = -1$

Exercice 13

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[-1;1]$.

Montrer que : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2}$

4-Disjonction des cas

Exercice 14

Par disjonction de cas, montrer que :

1. $(\forall k \in \mathbb{N}) \ : \ \cos(k\pi) = (-1)^k$; 2. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ x^6 - x^2 + 2 > 0$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x^2-9} \geq x - 3$; 2. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-10} = \sqrt{x-7}$; 3. $|x-1| + |3-x| = 14$

Exercice 16

1) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3.
2) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $n^3 - n$ est multiple de 3.

5- L'absurde

Exercice 17

Soient a, b et c des réels dans $[2;+\infty[$ tels que : $ab \leq c$. Montrer que : $a + b \leq c$.

Exercice 18

Montrer par l'absurde que :

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \dfrac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$
2. $(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}) \ : \ \dfrac{4x+1}{3x-2} \neq \dfrac{4}{3}$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \sqrt{n^2+7n+12} \notin \mathbb{N}$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \sqrt{x^2+1} - 1 \geq 0$
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0) \implies \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} \neq 2$

Exercice 19

Soit $a \in \mathbb{N}^*$; montrer que $a^2 + 1$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 20

Soit $x, y \in \mathbb{Q}^*$ tels que $x^3y + xy^3 = 8$, Montrer par l'absurde que $x \neq y$.

Exercice 21

1. Montrer par l'absurde que l'équation $(F) \ : \ 4x^4 + 2x^2 + x - 5 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que l'équation $(E) \ : \ 2nx^2 - 2(n^2+1)x - (n^2+1) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 23

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})(\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2) \quad n = 2^q(2p+1)$
2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \ : \quad 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 24

Soit a un nombre réel. Montrer par l'absurde que : $[(\forall \epsilon > 0) \ : \ |a| < \epsilon] \implies a = 0$

Exercice 25

1) Déterminer les restes de la division euclidienne d'un carré parfait par 3
2) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $\sqrt{3n+2} \notin \mathbb{N}$

Exercice 26

Soit la proposition :

$(P)\ :\ (\forall n \in \mathbb{N})\ :\ 3 \text{ divise } n^2 \implies 3 \text{ divise } n$

1) Déterminer la négation de (P)
2) Écrire (P) en utilisant la contraposée
3) Montrer que la proposition (P) est vraie
4) Montrer par l'absurde que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 27

1) Montrer par l'absurde que : $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$
2) En déduire que $\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2\ :\ [a + b\sqrt{5} = 0 \implies a = b = 0]$

6- Principe de récurrence

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

1) Montrer que : $\dfrac{2^{n-4}+1}{2^{n-4}} \leq \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \implies \sqrt{n} - 1 \leq 2^{n-3}$
2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2,3\})\ :\ \dfrac{2^{n-4}+1}{2^{n-4}} \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$

Exercice 29

Soit a un réel : $a \neq 1$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \dfrac{1-a^n}{1-a}$
2) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1$

Exercice 30

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ 3 \text{ divise } n(n+1)(2n+1)$

Exercice 31

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \dfrac{4^{n+1}-1}{3}$
2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
4. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$

Exercice 32

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)^2(n+4)$
2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ :\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 33

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2$

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}$

Exercice 34

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{4}{5} + 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n) \times 4^{n+1}}{5^n}$$

Exercice 35

1) Montrer que $(\forall m \in \mathbb{N}^*)\quad \sqrt{m+1} - \sqrt{m} \leq \dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$
2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\quad 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

﴿يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِن كُنتُمْ فِى رَيْبٍ مِّنَ ٱلْبَعْثِ فَإِنَّا خَلَقْنَٰكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ مِنْ عَلَقَةٍ
ثُمَّ مِن مُّضْغَةٍ مُّخَلَّقَةٍ وَغَيْرِ مُخَلَّقَةٍ لِّنُبَيِّنَ لَكُمْ ۚ وَنُقِرُّ فِى ٱلْأَرْحَامِ مَا نَشَآءُ إِلَىٰٓ أَجَلٍ مُّسَمًّى ثُمَّ
نُخْرِجُكُمْ طِفْلًا ثُمَّ لِتَبْلُغُوٓا۟ أَشُدَّكُمْ ۖ وَمِنكُم مَّن يُتَوَفَّىٰ وَمِنكُم مَّن يُرَدُّ إِلَىٰٓ أَرْذَلِ ٱلْعُمُرِ لِكَيْلَا يَعْلَمَ
مِنۢ بَعْدِ عِلْمٍ شَيْـًٔا ۚ وَتَرَى ٱلْأَرْضَ هَامِدَةً فَإِذَآ أَنزَلْنَا عَلَيْهَا ٱلْمَآءَ ٱهْتَزَّتْ وَرَبَتْ وَأَنۢبَتَتْ مِن كُلِّ
زَوْجٍۭ بَهِيجٍ﴾ (الحج 5)