الاشتقـــاق

I – العدد المشتق لدالة في نقطة :

1- العدد المشتق :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.

العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$ ونكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$.

مثال :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x+1$

بين إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=1$ محددا العدد المشتق في هذه النقطة .

الجواب : لدينا $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x+1-3}{x-1}\right)=\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x-2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\right)=2$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 ولدينا $f'(1)=2$

2- التأويل الهندسي للعدد المشتق - معادلة المماس لمنحنى دالة :

خاصية وتعريف :

لتكن f دالة و x_0 عنصرا من مجموعة تعريفها و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم .

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مماسا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامله الموجه هو $f'(x_0)$ ومعادلته هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2$.

حدد العدد المشتق للدالة f في النقطة 3 ثم حدد معادلة المستقيم (T) المماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 2 .

الحل :

لدينا $f(2)=3^2=9$

ولدينا $f'(3)=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3}(x+3)=6$

إذن معادلة المماس (T) هي : $y=6(x-3)+9$ أي : $y=6\cdot x-6\times 3+9$ أي : $y=6x-18+9$

وبالتالي (T) : $y=6x-9$

II – الدالة المشتقة لدالة عددية :

1) الاشتقاق على مجال :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I .

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقط المجال I .

2) الدالة المشتقة :

تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز f' والمعرفة كما يلي : $\begin{array}{l} f' : I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$

3) الدوال المشتقة لدوال اعتيادية :

إذا كان :	$f(x)=a$	$f(x)=x$	$f(x)=ax$	$f(x)=x^n$
فإن :	$f'(x)=0$	$f'(x)=1$	$f'(x)=a$	$f(x)=n.x^{n-1}$

أمثلة :

حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

(1 $f(x)=4$ (2 $f(x)=2x$ (3 $f(x)=x^3$

جواب :

(1 $f'(x)=0$ (2 $f'(x)=2$ (3 $f'(x)=3x^{3-1}=3x^2$

4) الدوال المشتقة والعمليات :

خاصية :

لتكن u و v دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق على مجال I ، و k عدد حقيقي ،

الدالة المعرفة بـ $f(x)=u(x)+v(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=u'(x)+v'(x)$

الدالة المعرفة بـ $f(x)=u(x)v(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

الدالة المعرفة بـ $f(x)=ku(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=ku'(x)$

الدالة $f:x\mapsto (u(x))^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=n\times u'(x)\times (u(x))^{n-1}$

وإذا كان $\forall x\in I:\ v(x)\neq 0$ فإن :

الدالة المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

الدالة المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

ملاحظة :

- كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها .

تمرين تطبيقي : أدرس قابلية اشتقاق ثم أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ و $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و $f(x)=(x-1).(x^3+x^2)$

III- تطبيقات الدالة المشتقة :

1) رتابة دالة وإشارة مشتقتها :

نشاط :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-4x+3$.

أدرس قابلية اشتقاق ثم أحسب مشتقة الدالة f وادرس إشارتها .

الحل :

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية ، ولدينا : $f'(x)=2x^{2-1}-4+0=2x-4$ ، إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	

خاصية :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I .

تكون f تزايدية على المجال I إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f'(x)\geq 0$

تكون f تناقصية على المجال I إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f'(x)\leq 0$

تكون f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f'(x)=0$

تمرين تطبيقي : باستعمال الخاصية السابقة ، أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-4x+3$ ثم ضع جدول تغيراتها.

الحل :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2) مطاريف دالة قابلة للاشتقاق :

نشاط :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=-x^2+2x+1$

1) بين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى هي 2 عند العدد 1 .

2) أحسب $f'(x)$ وأعط جدول إشارتها .

خاصية :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0\in I$ ،

- إذا انعدمت f' في x_0 وكانت إشارتها موجبة على يسار x_0 وسالبة على يمين x_0 فإن $f(x_0)$ قيمة قصوى للدالة f .
- إذا انعدمت f' في x_0 وكانت إشارتها سالبة على يسار x_0 وموجبة على يمين x_0 فإن $f(x_0)$ قيمة دنيا للدالة f .

تمرين :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-4x+9$ بين أن f تقبل قيمة دنيا هي 5 عند العدد 2 .