نهاية دالة عددية

I- النهايات المنتهية :

1) النهاية ℓ في x_0 :

تعريف :

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;b[$ و $x_0 \in]a;b[$ و ℓ عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى x_0 هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2x + 1$ لدينا $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -3$

خاصية :

لدينا النهايات: $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$ و ..... و $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$

2) النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]x_0;a[$ حيث $x_0 < a$ و ℓ عددا حقيقيا .

- إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أكبر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليمين عند x_0 هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;x_0[$ حيث $x_0 > a$ و ℓ عددا حقيقيا .

- إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أصغر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليسار عند x_0 هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

2) النهاية على اليسار لدالة في نقطة :

تعريف :

- إذا كان $f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أصغر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليسار عند x_0 هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

- إذا كان $f(x)$ يصغر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أصغر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليسار عند x_0 هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

خاصية :

تكون لدالة f نهاية ℓ في x_0 إذا وفقط إذا كانت لها نفس النهاية على اليمين وعلى اليسار في x_0 ، أي :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ يكافئ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ ، هل الدالة f تقبل نهاية في 0 ؟

لدينا: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1$

إذن f لا تقبل نهاية عند 0 لأن نهايتها على اليمين عند 0 تخالف نهايتها على اليسار عند 0 .

3) النهاية ℓ عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف :

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$ وليكن ℓ عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يكبر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$ حيث $a \in \mathbb{R}$ وليكن ℓ عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يكبر $-x$ أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

خاصية :

لدينا النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$

4) العمليات على النهايات المنتهية :

خاصية :

لتكن f و g دالتين بحيث : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell'$ و k عدد حقيقي ، لدينا :

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\ell+\ell'$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)=\ell.\ell'$ و $\lim\limits_{x\to x_0}k.f(x)=k.\ell$

- إذا كان $\ell'\neq 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\ell'}$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{\ell'}$

II- النهايات اللامنتهية :

1) النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند x_0 :

تعريف :

ليكن I مجالا مفتوحا مركزه x_0 و f دالة عددية معرفة على $I\setminus\{x_0\}$.

- إذا كان $f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية فإننا نقول إن :

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى x_0 هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$

- إذا كان $f(x)$ يصغر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية فإننا نقول إن :

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى x_0 هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$

مثال :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$

2) النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

- إذا كان $f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يكبر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن :

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- إذا كان $f(x)$ يصغر أكثر فأكثر عندما يكبر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن :

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ملاحظة :

بنفس الطريقة نعرف النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

خاصية:

لدينا النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to5}(x^2-3x+4)$ و $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+x^2+9)$ و $\lim\limits_{x\to0}(x^3+7x^2+3x-4)$

الحل :

$$\lim_{x\to5}(x^2-3x+4)=5^2-3\times5+4=25-15+4=14$$

$$\lim_{x\to-2}(x^3+x^2-9)=(-2)^3+(-2)^2+9=-8+4+9=5$$

$$\lim_{x\to0}(x^3+7x^2+3x-4)=0^3+7\times0^2+3\times0-4=0+0+0-4=-4$$

3) العمليات على النهايات :

ليكن x_0 و ℓ و ℓ' ثلاثة أعداد حقيقية .

أ) النهاية والجمع :

نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

ش غ م : شكل غير محدد، ويعني أن النهاية موجودة لكن لا يمكن استنتاجها مباشرة، ويلزم تطبيق تقنيات أخرى لتحديدها.

ب) النهاية والجداء :

نهاية f	ℓ	ℓ'	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
نهاية $f.g$	$\ell.\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

ج) النهاية والمقلوب :

نهاية f	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
نهاية $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

د) النهاية والخارج :

نهاية f	ℓ	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$\ell>0$	ℓ	ℓ	0
نهاية g	$\ell'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$+\infty$	$\pm\infty$	0
نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م		

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)$ و $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+1}{x-3}$ و $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x-3}$

III– نهاية دالة حدودية و نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ و $-\infty$:

خاصية :

- لتكن f و Q دالتين حدوديتين و a_nx^n و b_mx^m على التوالي حديهما الأكبر درجة ، لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_nx^n \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} a_nx^n$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(6x^2-3x+4)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^2-3x+4)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+x^2+9x-2)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-7x^3+x^2+9x-2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2-3x+4}{3x^2+4x-1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9x^2-3x-4}{3x^2+4x-1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x^2+9x-2}{x^2+2x+5}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^3+x^2-2}{x^2+2x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2+12x-19}{2x^3+x^2+4x-2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2+12x-19}{2x^3+x^2+4x-2}$