المتتاليات العددية

I- عموميات حول المتتاليات العددية :

1) نشاط :

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية :

أ) 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، .....

ب) 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، .....

ج) 0 ،1 ، 4 ، 9 ، .....

- نأخذ الآن الأعداد المتتابعة الآتية : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، ..... ونربط الأعداد الصحيحة الطبيعية بهذه الأعداد على الشكل التالي :

$$\begin{cases} 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;.....;\ n \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ ..... \ \ \downarrow \\ 1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;.....;u(n) \end{cases}$$

نقول لقد عرفنا تطبيقا u من المجموعة $I=\{0;1;2;3;.....;n\}$ نحو $\mathbb{R}$.

تعريف :

ليكن I جزءا من $\mathbb{N}$ ، كل علاقة u تربط كل عنصر من I بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية .

مثال :

نعتبر المتتالية المعرفة بـ $\begin{array}{l} u:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto 3n-1 \end{array}$

- نرمز لهذه المتتالية بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n) .

- نرمز لصورة n بالمتتالية u بالرمز u_n عوض $u(n)$.

- الأعداد u_0 ، u_1 ، u_2 ، ... تسمى حدود المتتالية (u_n)

- u_0 يسمى الحد الأول للمتتالية (u_n) .

- u_n يسمى الحد العام للمتتالية (u_n) .

- أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{10} .

II- المتتالية الحسابية :

نشاط :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=2n+1$

1- أحسب الحدود u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_{n+1}.

2- أحسب u_1-u_0 و u_2-u_1 و u_3-u_2 ثم $u_{n+1}-u_n$ ، ماذا تلاحظ ؟

1- تعريف :

لتكن (u_n) متتالية عددية .

- نقول إن (u_n) متتالية حسابية إذا وُجد عدد حقيقي r بحيث : $u_{n+1}=u_n+r$ لكل n من $\mathbb{N}$

- العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية (u_n) .

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n\geq 0:\ u_n=-5n+4$

بين أن (u_n) متتالية حسابية محددا أساسها.

2- الحد العام لمتتالية حسابية :

نشاط :

لتكن (u_n) متتالية حسابية و r أساسها .

لدينا المتساويات :

$$\begin{array}{l} \not{u_1}=u_0+r \\ \not{u_2}=\not{u_1}+r \\ \not{.....}\not{.....}... \\ \not{.....}\not{.....}... \\ u_n=\not{u_{n-1}}+r \\ \hline u_n=u_0+n.r \end{array}$$

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r و u_0 حدها الأول فإن : $u_n=u_0+n.r$ لكل n من $\mathbb{N}$

نتيجة :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإن : $u_n=u_m+(n-m)r$ لكل n و m من $\mathbb{N}$

تمرين تطبيقي :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_{10}=34$ ، أحسب الحدود : u_0 و u_{20} و u_{100} .

3- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

خاصية :

لتكن (u_n) متتالية حسابية ، نضع : $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$ حيث n من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $S_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

ملاحظات :

لتكن (u_n) متتالية حسابية ، نضع : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ حيث $n\geq 1$ لدينا : $S_n=n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$

لدينا : $S_n=(nombre\ de\ termes\ de\ S_n)\left(\frac{(1^{er}\ terme\ de\ S_n)+(dernier\ terme\ de\ S_n)}{2}\right)$

تمرين تطبيقي :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=2n+4$

1) بين أن (u_n) متتالية حسابية محددا أساسها.

2) أحسب المجموع : $S=u_0+u_1+u_2+.....+u_{50}$

3) أحسب المجموع : $S'=u_{15}+u_{16}+u_{17}+.....+u_{45}$

III- المتتالية الهندسية :

نشاط :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=2\times 3^n$

1- أحسب الحدود u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_{n+1}.

2- أحسب $\frac{u_1}{u_0}$ و $\frac{u_2}{u_1}$ و $\frac{u_3}{u_2}$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، ماذا تلاحظ ؟

1- تعريف :

لتكن (u_n) متتالية عددية .

- نقول إن (u_n) متتالية هندسية إذا وُجد عدد حقيقي q بحيث : $u_{n+1}=q\times u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

- العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية (u_n) .

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=5\times 2^n$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها .

2- الحد العام لمتتالية هندسية :

نشاط :

لتكن (u_n) متتالية هندسية و q أساسها .

لدينا المتساويات :

$u_1=q\times u_0$

$u_2=q\times u_1$

.....

.....

$u_n=q\times u_{n-1}$

$u_n=q^n\times u_0$

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q و u_0 حدها الأول فإن : $u_n=u_0\times q^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

نتيجة :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإن : $u_n=u_m\times q^{n-m}$ كل n و m من $\mathbb{N}$

مثال :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ بحيث : $u_{10}=640$ ، أحسب u_3 .

3- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

خاصية :

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q\neq 0$ و $q\neq 1$ ، نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ لدينا : $S_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ملاحظات :

- نفترض أن : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ لدينا $S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

لدينا : $S_n = \left(1^{er}\ terme\ de\ S_n\right) \times \left(\frac{1-q^{\left(nombre\ de\ termes\ de\ S_n\right)}}{1-q}\right)$

تمرين تطبيقي :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{1}{8} \times 2^n$

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا عناصرها المميزة .

2) أحسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$

3 أحسب المجموع : $S_n = u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_9$