عموميات حول الدوال العددية

I- الدالة الزوجية - الدالة الفردية – التأويل المبياني :

1- نشاط :

أدرس زوجية كل دالة من الدوال المعرفة أسفله :

$f(x)=x^2+3$ ، $g(x)=2x^3$ و $h(x)=x+1$

2- تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها .

تكون الدالة f زوجية إذا كان لكل x من D_f لدينا : $(-x)\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$

تكون الدالة f فردية إذا كان لكل x من D_f لدينا : $(-x)\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$

أمثلة :

بين أن الدالة $f : x\mapsto \frac{1}{x}$ فردية وأن الدالة $g : x\mapsto x^2+1$ زوجية .

3- خاصية (التأويل المبياني لزوجية دالة) :

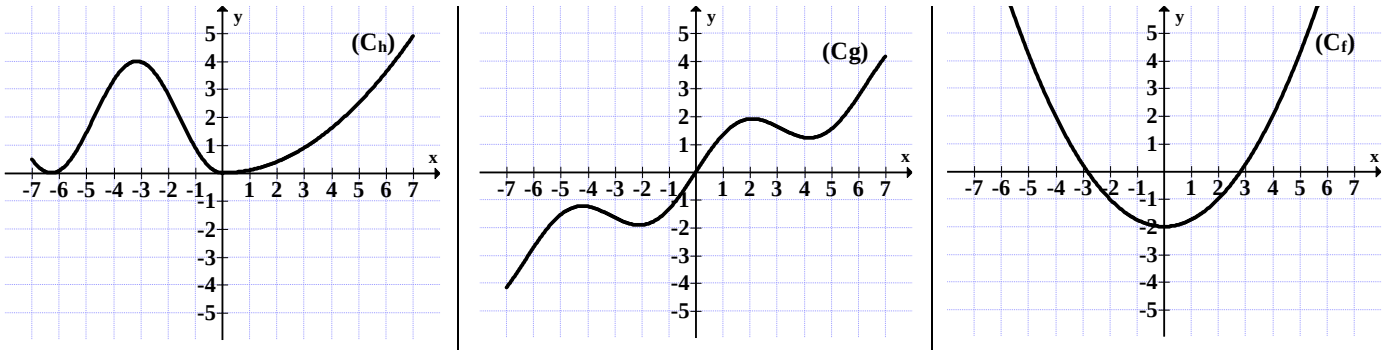
لتكن f دالة عددية و (C_f) منحناها في معلم متعامد .

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

أمثلة :

حدد مبيانيا زوجية الدوال f ، g و h .



II- الدالة المكبورة - الدالة المصغورة - الدالة المحدودة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن $\mathbb{R}$ و a و b عددين من $\mathbb{R}$.

- نقول إن f مكبورة بالعدد b على المجال I إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f(x)\le b$

- نقول إن f مصغورة بالعدد a على المجال I إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f(x)\ge a$

- نقول إن f محدودة على المجال I إذا وفقط إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{3}{1+x^2}$.

1) بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 0 على $\mathbb{R}$.

2) بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3 على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج ؟

III- مقارنة دالتين – التأويل الهندسي :

1- تساوي دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعتي تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان : $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ لكل x من D_f

مثال :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

بين أن : $f=g$.

2- مقارنة دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I.

- نقول إن f أصغر من أو تساوي g على I ونكتب $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f(x) \leq g(x)$

- نقول إن f أصغر قطعا من g على I ونكتب $f < g$ إذا وفقط إذا كان لكل x من I : $f(x) < g(x)$

مثال :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x) = 2x$ و $g(x) = x^2 + 1$ ، بين أن : $f \leq g$ على $\square$.

3- تأويلات هندسية :

- إذا كان $f = g$ على مجال I فإنه هندسيا يكون منحنى الدالة f منطبق مع منحنى الدالة g على المجال I.

- إذا كان $f \leq g$ على مجال I فإنه هندسيا يكون منحنى الدالة f تحت منحنى الدالة g على المجال I.

4- الحل المبياني لبعض المعادلات والمتراجحات :

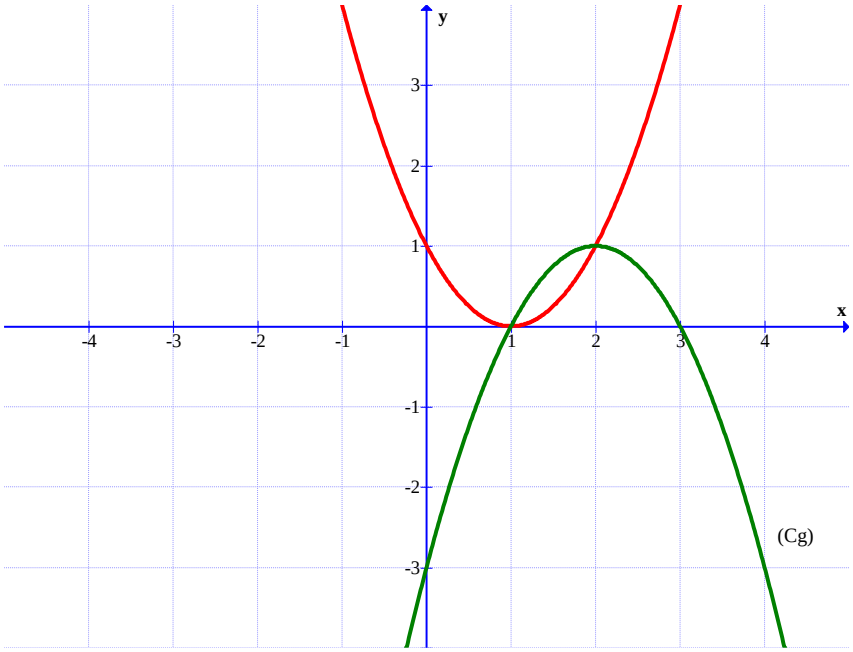
لتكن f دالة و I مجال ضمن مجموعة تعريفها و (C_f) منحناها .

- حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ في المجال I، هي أفاصيل نقط تقاطع منحنى الدالة f مع منحنى الدالة g .

- حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ في المجال I، هي أفاصيل نقط (C_f) التي من أجلها يكون (C_f) تحت (C_g) .

تمرين تطبيقي :

لتكن f و g الدالتين العدديتين الممثلتين أسفله :



1) قارن مبيانيا f مع g .

2) حل مبيانيا المعادلات التالية :

$f(x) = g(x)$

$f(x) = 0$

$g(x) = 0$

3) حل مبيانيا المتراجحات التالية :

$f(x) \leq g(x)$

$f(x) < 0$

$g(x) \geq 0$

V – رتابة دالة عددية :

1) تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .

- تكون f تزايدية على I يعني لكل x و y من I بحيث $x \leq y$ لدينا : $f(x) \leq f(y)$

- تكون f تناقصية على I يعني لكل x و y من I بحيث $x \leq y$ لدينا : $f(x) \geq f(y)$

- تكون f ثابتة على I يعني لكل x و y من I لدينا : $f(x) = f(y)$

مثال 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = 2x + 3$ ، بين أن f تزايدية على $\square$.

مثال 2 :

لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي : $g(x) = -4x + 1$ ، بين أن g تناقصية على $\square$.

ملاحظات :

نقول إن f رتيبة على مجال I إذا كانت إما تزايدية وإما تناقصية على المجال I.

2) معدل التغير :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها و x و y من I بحيث $x \neq y$.

العدد $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x و y .

خاصية :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .

إذا كان $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ لكل x و y من I بحيث $x \neq y$ فإن f تزايدية على I.

إذا كان $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$ لكل x و y من I بحيث $x \neq y$ فإن f تناقصية على I.

إذا كان $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0$ لكل x و y من I بحيث $x \neq y$ فإن f ثابتة على I.

مثال :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x) = 6x + 1$ و $g(x) = -5x + 3$ ، باستعمال معدل التغير :

1- بين أن f تزايدية على $\mathbb{R}$.

2- بين أن g تناقصية على $\mathbb{R}$.

IV– مطاريف دالة عددية :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها ، وليكن $x_0 \in D_f$.

- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى للدالة f عند العدد x_0 إذا كان لكل x من D_f : $f(x) \leq f(x_0)$

- نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة دنيا للدالة f عند العدد x_0 إذا كان لكل x من D_f : $f(x) \geq f(x_0)$

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية ، إذا كان العدد $f(x_0)$ قيمة قصوى أو دنيا للدالة f ، فإننا نقول إن f تقبل مطرافا عند x_0

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2) بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى لـ f .

3) بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا لـ f .