المنطـق

I– العبارة والعمليات على العبارات :

تعريف :

نسمي عبارة كل جملة مفيدة ، ويمكن الحكم على المعنى الذي تحمله بالصحة أو بالخطأ .

أمثلة :

نعتبر النصوص التالية :

p_1 : 0 عدد زوجي .

p_2 : $1<0$.

p_3 : 3 هو حل المعادلة $2x+1=7$.

p_1 و p_2 و p_3 كلها عبارات ،

العبارتين p_1 و p_3 صحيحتين والعبارة p_2 خاطئة .

جدول حقيقة عبارة P :

الجدول

P
1
0

أو الجدول

P
V
F

يسمى جدول حقيقة P حيث يمثل الحالات الممكنة لقيمة حقيقة P :
قد تكون P صحيحة ، ونرمز لهذه الحالة بـ 1 أو V نسبة إلى $Vrai$
قد; تكون P خاطئة ، ونرمز لهذه الحالة بـ 0 أو F نسبة إلى $Faux$

1- النفي المنطقي :

أ) تعريف :

لتكن P عبارة ، نفي العبارة P هي عبارة تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة ، وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة ، ونرمز لها بالرمز $\rceil P$ أو $\overline{P}$ وتقرأ : "نفي P"

ب) جدول حقيقة نفي عبارة :

P	$\rceil P$
1	0
0	1

أمثلة :

نفي العبارة $1<2$ هو العبارة $1\geq 2$

نفي العبارة $x\leq 3$ هو العبارة $x>3$

نفي العبارة $x\in \square$ هو العبارة $x\notin \square$

نفي العبارة $n=0$ هو العبارة $n\neq 0$

2- العطف المنطقي :

أ) تعريف :

عطف عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا ، ونرمز لها بالرمز (P و Q) أو بالرمز $(P\wedge Q)$.

ب) جدول حقيقة عطف عبارتين:

P	Q	$(P\wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة :

العبارة $\left((1>0)\ \wedge\ (-2\notin \square)\right)$ صحيحة .

العبارة $\left((\sqrt{9}=3)\ \wedge\ (-2<-3)\right)$ خاطئة .

3- الفصل المنطقي :

أ) تعريف :

فصل عبارتين P و Q هو عبارة تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتين P و Q خاطئتين معا ، ونرمز لها بالرمز (P أو Q) أو بالرمز $(P\vee Q)$.

ب) جدول حقيقة فصل عبارتين:

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة :

العبارة $\left(\sqrt{x^2}=|x|\right) \vee \left((-2 \in \mathbb{N})\right)$ صحيحة.

العبارة $\left(\pi = 3{,}14\right) \vee \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ خاطئة.

4- الاستلزام المنطقي :

أ) تعريف :

استلزام عبارتين P و Q (في هذا الترتيب) هو العبارة $\left(\bar{P} \vee Q\right)$ وتكون خاطئة فقط إذا كانت العبارة P صحيحة و Q خاطئة ، ونرمز لها بالرمز $(P \Rightarrow Q)$.

ب) جدول حقيقة استلزام عبارتين:

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ملاحظة :

- هناك عدة عبارات تدل على الاستلزام $P \Rightarrow Q$ منها :

إذا كانت P فإن Q ؛ P إذن Q ؛ P ومنه Q ؛ P وعليه فإن Q ؛ P وبالتالي Q....

- عمليا لكي نبين أن $P \Rightarrow Q$ ، نفترض أن P صحيحة ثم نبين أن Q صحيحة.

- لكي نبين أن P لا تستلزم Q ، نبحث عن مثال مضاد : يحقق P ولا يحقق Q .

أمثلة :

حدد قيمة حقيقة العبارات التالية :

P_1 : لكل x من $\mathbb{R}$: $\left(2x+1=7 \Rightarrow x=3\right)$.

P_2 : لكل x و y من $\mathbb{R}^-$: $\left(x<y \Rightarrow x^2<y^2\right)$.

5- التكافؤ المنطقي :

أ) تعريف :

تكافؤ عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة فقط إذا كانت للعبارة P و Q نفس قيمة الحقيقة ، ونرمز لها بالرمز $(P \Leftrightarrow Q)$.

ب) جدول حقيقة تكافؤ عبارتين:

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

ملاحظة :

- هناك عدة عبارات تدل على التكافؤ $P \Leftrightarrow Q$ منها :

P يعني Q ؛ P تكافئ Q ؛ P أي Q ؛ P إذا وفقط إذا كان Q ؛ P وبالتالي Q.

- عمليا لكي نبين أن $P \Leftrightarrow Q$ عبارة صحيحة ، يكفي أن نبين أن $P \Rightarrow Q$ وأن $Q \Rightarrow P$.

أمثلة :

حدد قيمة حقيقة العبارات التالية :

P_1 : لكل x من $\mathbb{R}$: $\left(2x-1=9 \Leftrightarrow x=5\right)$.

P_2 : لكل x و y من $\mathbb{R}$: $\left(x=0 \Leftrightarrow xy=0\right)$.

6- الدالة العبارية :

أ) تعريف :

نسمي دالة عبارية كل نص رياضي $P(x)$ يحتوي على متغير x من مجموعة E ، ويصبح عبارة كلما عوضنا x بعنصر من E ، ونكتب : $(x \in E): P(x)$.

ب) أمثلة :

النصوص التالية دوال عبارية :

$(x \in \mathbb{R}): \ x^2 > 0$ ؛ $(n \in \mathbb{N}): \ (2n+1$ عدد فردي$)$ ؛ $(x \in \mathbb{R}^+): \ x^2 \geq 2x - 1$

II– المكممات :

1- المكمم الوجودي :

أ) تعريف :

لتكن $p(x)$: $x \in E$ دالة عبارية .

العبارة $\exists x \in E : p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصرا x من E يحقق $p(x)$ ، وتقرأ "يوجد على الأقل x من E بحيث $p(x)$ "

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي .

ب) أمثلة :

$\exists x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 0$ عبارة صحيحة $\qquad$ $\exists n \in \mathbb{N} : 2n - 1 = 0$ عبارة خاطئة .

2- المكمم الكوني :

أ) تعريف :

لتكن $p(x)$: $x \in E$ دالة عبارية .

العبارة $\forall x \in E : p(x)$ تعني أن جميع عناصر E تحقق $p(x)$ ، وتقرأ "مهما كان x من E لدينا $p(x)$ "

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني .

ب) أمثلة :

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ عبارة صحيحة

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ عبارة خاطئة .

3- نفي عبارة مكممة :

أمثلة :

نفي العبارة $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ هو العبارة $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 0$

نفي العبارة $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 1 = 0$ هو العبارة $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 1 \neq 0$

خاصية (قانوني مورگان) :

لتكن P و Q عبارتين ، العبارات التالية قوانين منطقية :

نفي العبارة $(P$ و $Q)$ هو العبارة $(\bar{P}$ أو $\bar{Q})$ $\qquad$ نفي العبارة $(P$ أو $Q)$ هو العبارة $(\bar{P}$ و $\bar{Q})$

تطبيق :

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ ، حدد نفي العبارتين التاليتين :

$P_1 : (x \neq 0$ و $x \in \mathbb{R})$

$P_2 : (x \geq 0$ أو $x < 0)$

III– بعض الاستدلالات الرياضية :

1- الاستدلال بالتكافؤات المتوالية :

لكي نبين أن العبارة P صحيحة يكفي أن نبين أن P تكافئ Q وأن Q صحيحة .

تمرين تطبيقي 1 :

ليكن a و b عددين حقيقيين ، بين بالتكافؤات المتوالية أن : $(a+b)^2 \geq 4ab$

2- الاستدلال بالخلف :

لكي نبين أن P صحيحة ، نفترض العكس، أي أن $\rceil P$ صحيحة ثم نصل إلى تناقض ، فنستنتج أن افتراضنا خاطئ ، أي P صحيحة.

تمرين تطبيقي 2 :

ليكن x عدد حقيقي ، بين بالخلف أن : $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

3- الاستدلال بفصل الحالات :

ليكن $E = E_1 \cup E_2$ ، لكي نبين أن : $\forall x \in E : p(x)$ يكفي أن نبين أن $\forall x \in E_1 : p(x)$ وأن $\forall x \in E_2 : p(x)$.

تمرين تطبيقي 3 :

ليكن x عدد حقيقي ، بين بفصل الحالات أن : $(\forall x \in \mathbb{R}): |x| + x \geq 0$.