

I Notions générales

Définition 1.1 Une Matrice est un tableau rectangulaire de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

où les a_{ij} sont des nombres réels appelés les éléments ou coefficients de la matrice A . La matrice précédente est aussi notée par (a_{ij}) , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ou simplement par (a_{ij}) . L'élément a_{ij} est situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne. Une matrice ayant m lignes et n colonnes est appelée une matrice d'ordre (m, n) , ou de dimension $m \times n$. Les matrices seront notées habituellement par des lettres capitales $A, B, \dots$, et les éléments par des lettres minuscules $a, b, \dots$.

Exemple 1

SKILLS **PROBLEM-SOLVING**

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 5], \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1 La matrice A est de dimension 2×3 et on a $a_{23} = \sqrt{2}$, $a_{13} = 2$, $a_{22} = \frac{1}{2}$.

2 La matrice B est de dimension 3×1 et on a $b_{11} = -\sqrt{3}$, $b_{21} = \frac{1}{5}$, $b_{31} = 1$.

3 La matrice C est de dimension 1×4 et on a $C_{11} = -1$, $C_{12} = 0$, $C_{13} = 1$, $C_{14} = 5$.

4 La matrice D est de dimension 3×3 et on a $D_{33} = 0$, $D_{23} = 2$, $D_{32} = -1$.

@font1 @fontÉgalité de deux matrices

Définition 1.2 Deux matrices A et B sont égales, et on écrit $A = B$, si elles ont même dimension et si leurs éléments correspondants sont égaux.

Example

2

SKILLS

PROBLEM-SOLVING

On considère les matrices $A =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ \sqrt{y} & z \end{bmatrix}.$$

— Trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $A = B$.

Exercice résolu

Trouver les valeurs possibles de $x, y \in \mathbb{R}$ telles que les matrices

$$E = \begin{bmatrix} x^2 - 5 & 1 \\ 3 & -2y - 4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x + 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

soit égales.

II Matrices particulières

Dans cette on va définir quelques matrices spéciales.

Égalité de deu @font1 @fontÉgalité de deux matrices @fontMatrice ligne

Définition 1.3 Une matrice ligne est une matrice comportant une seule ligne. Une matrice ligne a donc pour dimension $1 \times n$. Une matrice ligne a la forme suivante :

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]_{1 \times n}.$$

Example

3

SKILLS

PROBLEM-SOLVING

La matrice $A = [1 \ 2 \ -1 \ 5 \ 0]$

est une matrice ligne de dimension 1×5 .

Matrice **Matrice ligne** et **Matrice colonne**

Définition 1.4 Une matrice colonne est une matrice comportant une seule colonne. Une matrice colonne a donc pour dimension $m \times 1$. Une matrice colonne a la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

Exemple

4

SKILLS

PROBLEM-SOLVING

La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ est une

matrice colonne de dimension 4×1 .



Opérations sur les matrice

Dans cette section on va définir les opérations algébriques sur les matrices.

Matrice **Matrice colonne** et **Somme de deux matrices**

Définition 1.5 Soit A et B deux matrices de même dimension. La somme de A et B , écrite $A + B$, est la matrice obtenue en ajoutant les éléments correspondants des deux matrices.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3},$$

$$\text{alors } A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

Exemple

5

SKILLS

PROBLEM-SOLVING

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1 Calculer $B + C$.

$$B + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 \\ 1 + 4 & 0 + 3 \\ 0 + 1 & 4 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2 Calculer $A + D$.

$$A + D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 1 & 0 + 1 & 1 + 0 \\ 1 + 2 & 3 + 0 & -1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3 La somme de A et B n'est pas définie car A et B ne sont pas de même dimension.

IV Exercices

Calcul matriciel

1 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Calculer $A+B$, AB , BA , A^2 et B^2 .

2 A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

3 Mêmes questions pour les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}.$$

1 Trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

2 Trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}.$$

3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

— Trouver x tel que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

4 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}.$$

— Trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xA + yB = C$.

5 Calculer si possible les produits matriciels suivants :

1

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^T$$