القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

تعـــريف

a و b عددان صحيحان $(b \neq 0)$ القول أن b يقسم a يعني وجود عدد صحيح k حيث $a = kb$ ، نقول كذلك ان b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b ونكتب $b \backslash a$ ونقرأ b يقسم a

تعـــريف

من أجل كل عدد صحيح a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b ،توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث : $0 \preceq r \prec b$ و $a = bq + r$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعـــريف

n عدد طبيعي غير معدوم ، القول أن عددين صحيحين متوافقان بتردد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n

✍ نكتب $a \equiv b[n]$

✍ نقرأ a يوافق b بتردد n

ملاحظة : من أجل كل عدد صحيح x : $x \equiv 0[1]$

مبرهنة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. يكون للعدين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعفا للعدد n

مثال

$41 - 20 = 21$ والعدد 21 مضاعف للعدد 7

العددان 41 و 20 متوافقان بتردد 7 ونكتب $41 \equiv 20[7]$

للعددين 41 و 20 نفس الباقي في القسمة على 7 هو 6

$20 \equiv 6[7]$ و $41 \equiv 6[7]$

خاصية

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$

كل عدد صحيح a يوافق بتردد n باقي قسمته على n

$a \equiv r[n]$ و $a = nq + r$

حيث q عدد صحيح و $0 \preceq r \prec n$

ملاحظة

إذا كان $a \equiv r[n]$

نقول عن r أنه باقي قسمة a على n في حالة إذاكان $0 \preceq r \prec n$

خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

خاصية 1

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ومن أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$

خاصية 2

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$

خاصية 3(خاصية التعدي)

n عدد طبيعي غير معدوم a ، b و c أعداد صحيحة إذاكان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$

خاصية 4(خاصية التلاؤم مع الجمع)

n عدد طبيعي غير معدوم a ، b ، c و d أعداد صحيحة إذاكان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$

خاصية 5(خاصية التلاؤم مع الضرب)

n عدد طبيعي غير معدوم a ، b ، c و d أعداد صحيحة إذاكان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $a \times c \equiv b \times d[n]$

خاصية 6

n و p عداد طبيعيان غير معدومين a و b عدادان صحيحان إذاكان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$