

1 Introduction

Voici un exemple d'utilisation de différents environnements de théorèmes.

Théorème 1.1. *Soit a et b deux nombres réels. Si $a > b$, alors $a + 1 > b + 1$.*

Proof. Supposons $a > b$. En ajoutant 1 des deux côtés de l'inégalité, nous obtenons $a + 1 > b + 1$. Ceci conclut la preuve. $\square$

Définition 1.2. *Un nombre premier est un entier naturel supérieur à 1 qui n'a aucun diviseur positif autre que 1 et lui-même.*

Proposition 1.3. *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Proof. Ceci est un résultat classique dû à Euclide. Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers, notés $p_1, p_2, \dots, p_n$. Considérons le nombre $P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Ce nombre P n'est divisible par aucun des p_i , ce qui est une contradiction. Donc, il doit y avoir une infinité de nombres premiers. $\square$

Corollaire 1.4. *Il y a au moins un nombre premier dans tout intervalle de la forme $[n, 2n]$ pour $n \geq 2$.*

Lemme 1.5. *Pour tout entier n , $n^2 \geq n$.*

Exemple 1.6. *Considérons les entiers 3 et 5. Alors $3 < 5$ et en ajoutant 1, nous avons $3 + 1 < 5 + 1$, ce qui confirme le théorème précédent.*

Remarque 1.7. *La méthode de preuve par contradiction est souvent utilisée pour démontrer des propositions impliquant des infinis.*